લિબર્ટી પેપરસેટ

ધોરણ 12 : ગણિત

Full Solution

સમય : 3 કલાક **અસાઈનમેન્ટ પ્રશ્નપત્ર 1**

PART A

1. (C) **2.** (B) **3.** (C) **4.** (B) **5.** (A) **6.** (A) **7.** (D) **8.** (B) **9.** (C) **10.** (A) **11.** (B) **12.** (D) **13.** (C) **14.** (A) **15.** (B) **16.** (D) **17.** (C) **18.** (A) **19.** (B) **20.** (C) **21.** (A) **22.** (B) **23.** (C) **24.** (C) **25.** (D) **26.** (A) **27.** (D) **28.** (C) **29.** (B) **30.** (D) **31.** (C) **32.** (B) **33.** (A) **34.** (B) **35.** (C) **36.** (A) **37.** (D) **38.** (A) **39.** (C) **40.** (B) **41.** (C) **42.** (A) **43.** (D) **44.** (A) **45.** (C) **46.** (A) **47.** (B) **48.** (C) **49.** (A) **50.** (D)

PART B

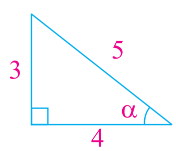
વિભાગ-A

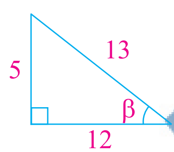
1.

ડા.બા. $= cos^{-1}\dfrac{4}{5} + cos^{-1}\dfrac{12}{13}$

$cos^{-1}\dfrac{4}{5} = \alpha$, $cos^{-1}\dfrac{12}{13} = \beta$

$\therefore$ $cos\ \alpha = \dfrac{4}{5}$, $cos\ \beta = \dfrac{12}{13}$





$\therefore$ $sin\ \alpha = \dfrac{3}{5}$, $sin\ \beta = \dfrac{5}{13}$

અહીં, $cos(\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ \alpha\ sin\ \beta$

$= \left(\dfrac{4}{5} \times \dfrac{12}{13}\right) - \left(\dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{13}\right)$

$= \dfrac{48}{65} - \dfrac{15}{65}$

$cos(\alpha + \beta) = \dfrac{33}{65}$

$\therefore$ $\alpha + \beta = cos^{-1}\left(\dfrac{33}{65}\right)$

$\therefore$ $cos^{-1}\dfrac{4}{5} + cos^{-1}\dfrac{12}{13} = cos^{-1}\dfrac{33}{65}$

2.

ડા.બા. $= sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

ધારો કે, $x = sin\ \theta$ લેતાં,

$\therefore$ $\theta = sin^{-1}x,\ \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$= sin^{-1}(2\ sin\ \theta\ \sqrt{1-sin^2\theta})$

$= sin^{-1}(2\ sin\ \theta\ cos\ \theta)$

$= sin^{-1}(sin\ 2\theta)$

અહીં, $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $-sin\ \dfrac{\pi}{4} \le sin\ \theta \le sin\ \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ $sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \le sin\ \theta \le sin\ \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ $-\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore$ $-\dfrac{\pi}{2} \le 2\theta \le \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ $2\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ .... (1)

$\therefore$ $sin^{-1}(sin\ 2\theta) = 2\theta$ ($\because$ પરિણામ (1) પરથી)

$= 2\ sin^{-1}x$

= જ.બા.

3.

ધારો કે, $u = x^y$ અને $v = y^x$

$\therefore$ $u + v = 1$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx} = 0$ ...... (1)

અહીં, $u = x^y$ ની

બંને બાજુ log લેતાં,

$log\ u = ylogx$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\dfrac{du}{dx}\dfrac{1}{u} = y\dfrac{d}{dx}logx + log\ x\dfrac{d}{dx}y$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx}\,\frac{1}{u} = y\cdot\frac{1}{x} + \log x\,\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = u\left[\frac{y}{x} + \log x\,\frac{dy}{dx}\right]$$

$$= x^{y}\left[\frac{y}{x} + \log x\,\frac{dy}{dx}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = x^{y-1}\,y + x^{y}\,\log\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{...... (2)}$$

હવે, $v = y^x$ ની

બંને બાજુ log લેતાં,

$\log v = x\log y$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{1}{v}\,\frac{dv}{dx} = x\,\frac{d}{dx}\log y + \log y\,\frac{d}{dx}\,x$$

$$\therefore \quad \frac{1}{v}\,\frac{dv}{dx} = x\cdot\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} + \log y$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = v\left[\frac{x}{y}\,\frac{dy}{dx} + \log y\right]$$

$$= y^{x}\left[\frac{x}{y}\,\frac{dy}{dx} + \log y\right] \qquad \text{...... (3)}$$

પરિણામ (1) માં પરિણામ (2) અને (3) ની કિંમત મૂકતાં,

$$x^{y-1}\,y + x^{y}\,\log x\,\frac{dy}{dx} + y^{x-1}\,x\,\frac{dy}{dx} + y^{x}\,\log y = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\,[x^{y}\log x + y^{x-1}\,x] = -\,y^{x}\log y - x^{y-1}\,y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\,\frac{[y^{x}\log y + x^{y-1}\,y]}{[x^{y}\log x + y^{x-1}\,x]}$$

4.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{8+3x-x^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-3x-8)}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-2\left(\frac{3x}{2}\right)+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-8\right)}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{41}{4}\right)}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{41}}{2}}\right) + c$$

$$\therefore \quad I = \sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{41}}\right) + c$$

5.

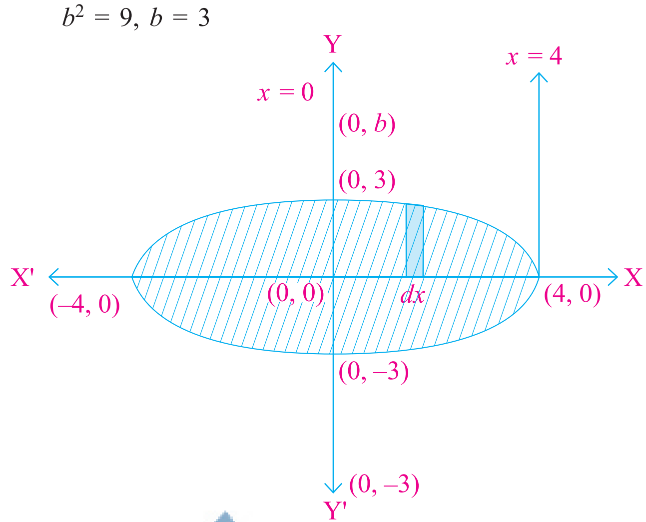
$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

$$\therefore \quad \frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 16,\ a = 4\ (a > b)$

$b^2 = 9,\ b = 3$



આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ :

A = 4 × પ્રથમ પ્રદેશ વડે આવૃત્ત ક્ષેત્રફળ

$\therefore$ A = 4|I|

$$I = \int_0^4 y\ dx$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\therefore \quad y^2 = 9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$$

$$\therefore \quad y^2 = \frac{9}{16}\,(16-x^2)$$

$$\therefore \quad y^2 = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$$

$$I = \int_0^4 \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\ dx$$

$$I = \frac{3}{4}\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\ dx$$

$$I = \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^4$$

$$I = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{4}{2}(0) + 8\sin^{-1}(1)\right) - \left(0 + \sin^{-1}(0)\right)\right]$$

$$I = \frac{3}{4}\left(8\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$I = 3\pi$

હવે, A $= 4|I|$

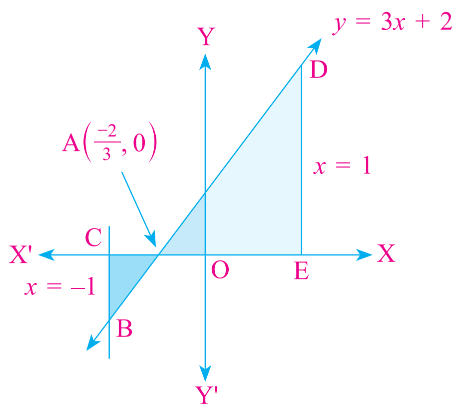
$= 4|3\pi|$

$\therefore$ A $= 12\pi$ ચોરસ એકમ

6.

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે રેખા $y = 3x + 2$, X-અક્ષને $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ માં છેદે છે અને આ આલેખ $x \in \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ માટે X-અક્ષની નીચે છે અને

આલેખ $x \in \left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ માટે X-અક્ષની ઉપર છે.



માંગેલ ક્ષેત્રફળ

= પ્રદેશ ACBAનું ક્ષેત્રફળ + પ્રદેશ ADEAનું ક્ષેત્રફળ

$$= \left|\int_{-1}^{-\frac{2}{3}} (3x+2)\, dx\right| + \int_{-\frac{2}{3}}^{1} (3x+2)\, dx$$

$$= \left|\left(\frac{3}{2}x^2 + 2x\right)_{-1}^{-\frac{2}{3}}\right| + \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x\right)_{-\frac{2}{3}}^{1}$$

$$= \left|\left(\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}(1) + 2(-1)\right)\right| + \left(\frac{3}{2}(1) + 2(1)\right) - \left(\frac{3}{2}\left(\frac{4}{9}\right) + 2\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$= \left|\frac{2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{3}{2} + 2\right| + \frac{3}{2} + 2 - \frac{2}{3} + \frac{4}{3}$$

$$= \left|\frac{-2}{3} - \frac{3}{2} + 2\right| + \frac{3}{2} + 2 + \frac{2}{3}$$

$$= \left|\frac{-4 - 9 + 12}{6}\right| + \frac{9 + 12 + 4}{6}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{25}{6}$$

$$= \frac{26}{6}$$

$= \frac{13}{3}$ ચોરસ એકમ

7.

$sec^2x \cdot tan\ y\ dx + sec^2y\ tan\ x\ dy = 0$

$\therefore\ sec^2x\ tan\ y\ dx = -sec^2y\ tan\ x\ dy$

$$\therefore\ \frac{sec^2 y}{tan\ y}\ dy = \frac{-sec^2 x}{tan\ x}\ dx$$

→ બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{sec^2 y}{tan\ y} dy = -\int \frac{sec^2 x}{tan\ x} dx$$

$$\therefore \int \frac{\frac{d}{dy}(tan\ y)}{tan\ y}\ dy = -\int \frac{\frac{d}{dx}(tan\ x)}{tan\ x}\ dx$$

$$\therefore\ log\ |tan\ y| = -log\ |tan\ x| + log\ |c|$$

$$\therefore\ log\ |tan\ y| = log\left|\frac{c}{tan\ x}\right|$$

$$\therefore\ tan\ y = \frac{c}{tan\ x}$$

$$\therefore\ tan\ x \cdot tan\ y = c;$$

જે આપેલ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ છે.

8.

અહીં,

$\overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i} + (-3+1)\hat{j} + (-5-1)\hat{k}$

$= -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}$

$\overrightarrow{BC} = (3-1)\hat{i} + (-4+3)\hat{j} + (-4+5)\hat{k}$

$= 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

અને

$\overrightarrow{CA} = (2-3)\hat{i} + (-1+4)\hat{j} + (1+4)\hat{k}$

$= -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$

ઉપરાંત, જુઓ કે,

$|\overrightarrow{AB}|^2 = 41$

$= 6 + 35$

$= |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$

તેથી, ત્રિકોણ ABC એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

9.

રેખા $L_1 : \frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$

$\vec{r} = (8\hat{i} - 19\hat{j} + 10\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} - 16\hat{j} + 7\hat{k})$

રેખાની દિશા $\vec{b_1} = 3\hat{i} - 16\hat{j} + 7\hat{k}$

રેખા $L_2 : \frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$

$\vec{r_2} = (15\hat{i} + 29\hat{j} + 5\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k})$

રેખાની દિશા $\vec{b_2} = 3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k}$

$$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -16 & 7 \\ 3 & 8 & -5 \end{vmatrix}$$

$= 24\hat{i} + 36\hat{j} + 72\hat{k}$

$= 12(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$\therefore$ માંગેલ રેખાની દિશા $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$

રેખા પરનું બિંદુ $A(\vec{a}) = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ :

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{6}$$

10.

આપણી પાસે

$\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ અને $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 8\hat{k}$ છે.

હવે, રેખાનું સદિશ સમીકરણ

$\vec{r} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} - 2\hat{j} + 8\hat{k})$ થશે.

હવે, રેખા પરના બિંદુ $P(x, y, z)$ નો સ્થાનસદિશ $\vec{r}$ છે.

તેથી, $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$= 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$

$$= (5 + 3\lambda)\hat{i} + (2 + 2\lambda)\hat{j} + (-4 - 8\lambda)\hat{k}$$

λનો લોપ કરતાં, આપણને થશે.

$\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-8}$ મળે.

આ કાર્તેઝિય સ્વરૂપમાં રેખાનું સમીકરણ છે.

11.

$P(E) = 0.6$

$P(F) = 0.3$

$P(E \cap F) = 0.2$

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$$

$$P(F \mid E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

12.

જો પ્રયોગની તમામ 36 પ્રાથમિક ઘટનાઓ સમસંભાવી છે એવું ધારી લઈએ, તો

$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ અને

$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

વળી, $P(A \cap B) = P$

(બંને વખત ફેંકતા અયુગ્મ સંખ્યા મળે.)

$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

હવે, $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

સ્પષ્ટ છે કે $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

આમ, A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

વિભાગ-B

13.

અહીં R પર વ્યાખ્યાયિત સંબંધ

$S = \{(a, b) : a \le b^3\}$

$a = \frac{1}{2}$ માટે $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin S$ $\left(\because \frac{1}{2} \not< \frac{1}{8}\right)$

$\therefore$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin S$ $\therefore$ S એ સ્વવાચક નથી.

ધારો કે, $(1, 5) \in S$

તો $(5, 1) \notin S$ $(\because 5 \not\le 1)$

$\therefore$ S એ સંમિત નથી.

ધારો કે, $(a, b) \in S$ તથા $(b, c) \in S$

$\therefore$ $a \le b^3$ તથા $b \le c^3$

$\therefore$ $b^3 \le c^9$

આમ, $a \le b^3 \le c^9$

$\therefore$ $a \le c^9$

$\therefore$ $(a, c) \notin S$

$\therefore$ S એ પરંપરિત નથી.

આમ, સંબંધ S એ સ્વવાચક નથી, સંમિત નથી કે પરંપરિત નથી.

14.

$$A^2 = A \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+4 & 0+0+0 & 2+0+6 \\ 0+0+2 & 0+4+0 & 0+2+3 \\ 2+0+6 & 0+0+0 & 4+0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+0+16 & 0+0+0 & 10+0+24 \\ 2+0+10 & 0+8+0 & 4+4+15 \\ 8+0+26 & 0+0+0 & 16+0+39 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

હવે, ડા.બા. $= A^3 - 6A^2 + 7A + 2I$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -30 & 0 & -48 \\ -12 & -24 & -30 \\ -48 & 0 & -78 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & 14 & 7 \\ 14 & 0 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21-30+7+2 & 0+0+0+0 & 34-48+14+0 \\ 12-12+0+0 & 8-24+14+2 & 23-30+7+0 \\ 34-48+14+0 & 0+0+0+0 & 55-78+21+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O = \text{જ.બા.}$$

15.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$$

yz નો સહઅવયવ $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix}$

$= (1)(z - y)$

$= (z - y)$

zx નો સહઅવયવ $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{vmatrix}$

$= (-1)(z - x)$

$= x - z$

xy નો સહઅવયવ $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix}$

$= (1)(y - x)$

$= y - x$

$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$

$= (yz)(z - y) + (zx)(x - z) + (xy)(y - x)$

$= yz^2 - y^2z + zx^2 - z^2x + xy^2 - x^2y$

$= z(x^2 - y^2) + z^2(y - x) + xy(y - x)$

$= z[(x - y)(x + y)] + z^2(y - x) + xy(y - x)$

$= (y - x)(-z(x + y) + z^2 + xy)$

$= (y - x)(-zx - yz + z^2 + xy)$

$= (y - x)(z(z - x) - y(z - x))$

$= (y - x)(z - x)(z - y)$

$= (x - y)(y - z)(z - x)$

16.

$y = (tan^{-1} x)^2$ નું

બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = 2tan^{-1} x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore y_1 = \frac{2\,tan^{-1}x}{1+x^2}$$

$\therefore (1 + x^2)\, y_1 = 2tan^{-1}x$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે પુનઃ વિકલન કરતાં,

$$\therefore (1 + x^2)\, y_2 + y_1 \cdot 2x = \frac{2}{(1+x^2)}$$

$\therefore (1 + x^2)^2 y_2 + 2x(1 + x^2)\, y_1 = 2$

17.

$f(x) = 2x^3 - 24x + 107$

$\therefore f'(x) = 6x^2 - 24$

$\rightarrow f$ ના મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે,

$f'(x) = 0$

$\therefore 6x^2 - 24 = 0$

$\therefore 6x^2 = 24$

$\therefore x^2 = 4$

$\therefore x = \pm 2$

$\therefore x = 2 \in (1, 3)$ અને $x = -2 \in (-3, -1)$

$f(2) = 2(2)^3 - 24(2) + 107$

$= 16 - 48 + 107$

$= 75$

$\rightarrow a = 1,\ b = 3$

$f(a) = f(1)$

$= 2(1)^3 - 24(1) + 107$

$= 2 - 24 + 107$

$= 85$

$f(b) = f(3)$

$= 2(3)^3 - 24(3) + 107$

$= 54 - 72 + 107 = 89$

વૈશ્વિક મહત્તમ $= max\ \{85, 89, 75\}$

$= 89$

$\rightarrow -2 \in (-3, -1)$ હોવાથી,

$f(-2) = 2(-2)^3 - 24(-2) + 107$

$= 139$

$\rightarrow$ જો $a = -3,\ b = -1$

$f(a) = f(-3)$

$= 2(-3)^3 - 24(-3) + 107$

$= -54 + 72 + 107$

$= 125$

$f(b) = f(-1)$

$= 2(-1)^3 - 24(-1) + 107$

$= -2 + 24 + 107$

$= 129$

વૈશ્વિક મહત્તમ $= max\ \{139, 125, 129\}$

$= 139$

18.

$\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$

$\vec{b} = \lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore \vec{a} + \vec{b} = (2 + \lambda)\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

હવે, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(2+\lambda)^2 + 36 + 4}$

$= \sqrt{4 + 4\lambda + \lambda^2 + 40}$

$= \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda + 44}$

$\vec{a}$ અને $\vec{b}$ ના સરવાળાની દિશામાં એકમ સદિશ

$$= \frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|}$$

$$= \frac{(2+\lambda)\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda + 44}}$$

હવે, $\dfrac{(2+\lambda)\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{\lambda^2+4\lambda+44}}$ નો $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ સાથે અદિશ ગુણાકાર 1 છે.

$\therefore \left(\dfrac{(2+\lambda)\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{\lambda^2+4\lambda+44}}\right) \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$

$\therefore \left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2+4\lambda+44}}\right) (2 + \lambda + 6 - 2) = 1$

$\therefore (\lambda + 6) = \sqrt{\lambda^2+4\lambda+44}$

$\therefore (\lambda + 6)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 44$

$\therefore \lambda^2 + 12\lambda + 36 = \lambda^2 + 4\lambda + 44$

$\therefore 8\lambda = 8$

$\therefore \lambda = 1$

19.

$\dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y+1}{-6} = \dfrac{z+1}{1}$

$L : \vec{r} = (-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \lambda(7\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k})$

તથા $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z-7}{1}$

$M : \vec{r} = (3\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}) + \mu(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

$\vec{a_1} = -\hat{i} - \hat{j} - \hat{k};$

$\vec{b_1} = 7\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}$

તથા $\vec{a_2} = 3\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k};$

$\vec{b_2} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

હવે, $\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = -4\hat{i} - 6\hat{j} - 8\hat{k}$

$\neq \vec{0}$

$\therefore$ રેખાઓ છેદક અથવા વિષમતલીય છે.

હવે, $|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{16+36+64}$

$= \sqrt{116}$

$= 2\sqrt{29}$

$\vec{a_2} - \vec{a_1} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$

$\therefore (\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2})$

$= (4\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}) \cdot (-4\hat{i} - 6\hat{j} - 8\hat{k})$

$= -16 - 36 - 64$

$= -116$

$\neq 0$

$\therefore$ રેખાઓ વિષમતલીય છે.

બે રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર,

$= \dfrac{|(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2})|}{\vec{b_1} \times \vec{b_2}}$

$= \dfrac{|-116|}{\sqrt{116}}$

$= \sqrt{116}$

$= \sqrt{4 \times 29}$

$= 2\sqrt{29}$ એકમ

20.

$x + 2y \leq 8$

$3x + 2y \leq 12$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

હેતુલક્ષી વિધેય $Z = -3x + 4y$

$x + 2y = 8$ ... (i)

x	0	8
y	4	0

$3x + 2y = 12$ ... (ii)

x	0	4
y	6	0

(i) અને (ii)નો ઉકેલ,

$\therefore 8 - x = 12 - 3x$

$\therefore 2x = 4$

$\therefore x = 2$

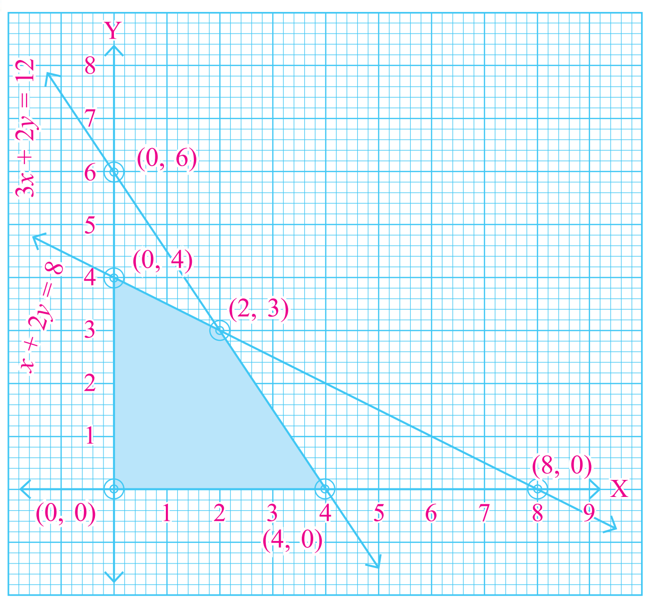
$2 + 2y = 8$

$2y = 6$

$\therefore y = 3$

(2, 3)

(0, 0)



આકૃતિમાં આપેલ અસમતાઓનો આલેખ દર્શાવ્યો છે જે સિમિત છે. શક્ય ઉકેલપ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ (0, 0), (4, 0) અને (0, 4) મળે.

શક્ય ઉકેલ પ્રદેશના શિરોબિંદુ	$Z = -3x + 4y$
(0, 4)	Z = 16
(4, 0)	Z = –12 ← ન્યૂનતમ
(2, 3)	Z = 6
(0, 0)	Z = 0

આમ, બિંદુ (4, 0) આગળ ન્યૂનતમ મૂલ્ય –12 મળે અને બિંદુ (0, 4) આગળ મહત્તમ મૂલ્ય 16 મળે.

21.

➪ ઘટનાઓ B_1, B_2, B_3 નીચે પ્રમાણે લો :

B_1 : બોલ્ટનું ઉત્પાદન યંત્ર A દ્વારા થયું છે.

B_2 : બોલ્ટનું ઉત્પાદન યંત્ર B દ્વારા થયું છે.

B_3 : બોલ્ટનું ઉત્પાદન યંત્ર C દ્વારા થયું છે.

સ્પષ્ટ છે કે, B_1, B_2, B_3 પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ છે અને તેથી તેઓ નિદર્શાવકાશનું વિભાજન દર્શાવે છે. ઘટના E ‘બોલ્ટ ખામીયુક્ત છે’ તે લો.

ઘટના E, B_1ની સાથે અથવા B_2ની સાથે અથવા B_3ની સાથે ઉદ્ભવે છે.

આપેલ છે $P(B_1) = 25\% = 0.25$,

$P(B_2) = 0.35$ અને

$P(B_3) = 0.40$

ફરીથી ખામીયુક્ત બોલ્ટ કાઢવામાં આવ્યો છે. આપેલ છે કે તે યંત્ર A વડે ઉત્પાદિત થયો હોય, તો તે ઘટનાની સંભાવના

$P(E \mid B_1) = 5\% = 0.05$

આ જ પ્રમાણે $P(E \mid B_2) = 0.04$, $P(E \mid B_3) = 0.02$

તેથી, બેયઝના પ્રમેય દ્વારા,

$$P(B_2 \mid E) = \frac{P(B_2)\cdot P(E \mid B_2)}{P(B_1)P(E \mid B_1) + P(B_2)P(E \mid B_2) + P(B_3)P(E \mid B_3)}$$

$$= \frac{0.35 \times 0.04}{0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.40 \times 0.02}$$

$$= \frac{0.0140}{0.0345}$$

$$= \frac{28}{69}$$

વિભાગ-C

22.

➪ $$[x \quad -5 \quad -1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 1\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\4\\1\end{bmatrix} = O$$

$$\therefore\ [x + 0 - 2 \quad 0 - 10 + 0 \quad 2x - 5 - 3]\begin{bmatrix}x\\4\\1\end{bmatrix} = O$$

$$\therefore\ [x - 2 \quad -10 \quad 2x - 8]\begin{bmatrix}x\\4\\1\end{bmatrix} = O$$

$\therefore\ [x(x - 2) + (-10)(4) + (2x - 8)(1)] = O$

$\therefore\ [x^2 - 2x - 40 + 2x - 8] = O$

$\therefore\ [x^2 - 48] = [0]$

$\therefore\ x^2 - 48 = 0$

$\therefore\ x^2 = 48$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$

23. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 6,$

$\frac{1}{y} + \frac{3}{z} = 11,$

$\frac{1}{x} - \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 0$

➪ આપેલ સમીકરણને શ્રેણિક સ્વરૂપે દર્શાવતાં,

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 3\\1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{x}\\\frac{1}{y}\\\frac{1}{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\11\\0\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 3\\1 & -2 & 1\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}\frac{1}{x}\\\frac{1}{y}\\\frac{1}{z}\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}6\\11\\0\end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 3\\1 & -2 & 1\end{vmatrix}$$

$= 1(1 + 6) - 1(0 - 3) + 1(0 - 1)$

$= 7 + 3 - 1$

$= 9 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix}7 & -3 & 2\\3 & 0 & -3\\-1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{ adj } A$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix}7 & -3 & 2\\3 & 0 & -3\\-1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$\therefore\ AX = B$

$\therefore\ A^{-1}AX = A^{-1}B$

$\therefore\ IX = A^{-1}B$

$\therefore\ X = A^{-1}B$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix}7 & -3 & 2\\3 & 0 & -3\\-1 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\11\\0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix}42 & -33 & +0\\18 & +0 & -0\\-6 & +33 & +0\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix}9\\18\\27\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} \\ \frac{1}{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ ઉકેલ : $\frac{1}{x} = 1, \frac{1}{y} = 2, \frac{1}{z} = 3$

$\therefore x = 1, y = \frac{1}{z}, z = \frac{1}{3}$

24.

$x = a(cost + tsint)$

$\therefore \frac{dx}{dt} = a(- sint + tcost + sint)$

$\therefore \frac{dx}{dt} = atcost$

હવે, $y = a(sint - tcost)$

$\therefore \frac{dy}{dt} = a[cost + tsint - cost]$

$\therefore \frac{dy}{dt} = atsint$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{at\sin t}{at\cos t} = tant$

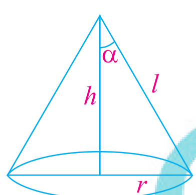
હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે પુનઃ વિકલન કરતાં,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(tan\, t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = sec^2t \, \frac{dt}{dx} = \frac{sec^2 t}{at\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{sec^3 t}{at};\ 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

25.



ધારો કે શંકુની પાયાની ત્રિજ્યા r, ઊંચાઈ h અને તિર્યક ઊંચાઈ l છે.

$\therefore l^2 = h^2 + r^2$ .... (1)

શંકુનો અર્ધશિરઃ કોણ α ધારો.

$\therefore tan\, \alpha = \frac{r}{h}$

$\therefore \alpha = tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right)$

→ શંકુનું ઘનફળ V $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi(l^2 - h^2)h$ ($\because$ પરિણામ (1))

$\therefore f(h) = \frac{\pi}{3}(l^2h - h^3)$

$f'(h) = \frac{\pi}{3}(l^2 - 3h^2)$

$\therefore f''(h) = \frac{\pi}{3}(-6h)$

$\therefore f''(h) = -2\pi h < 0$

$\therefore f$ ને મહત્તમ મૂલ્ય મળે.

→ હવે, શંકુનું મહત્તમ ઘનફળ મેળવવા માટે,

$f'(h) = 0$

$\therefore \frac{\pi}{3}(l^2 - 3h^2) = 0$

$\therefore l^2 - 3h^2 = 0$

$\therefore h^2 + r^2 - 3h^2 = 0$

$\therefore r^2 - 2h^2 = 0$

$\therefore r^2 = 2h^2$

$\therefore r = \sqrt{2}\, h$

$\therefore \frac{r}{h} = \sqrt{2}$

$\therefore$ અર્ધશિરઃ કોણ $= tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right)$

$= tan^{-1}(\sqrt{2})$

26.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} log\,(1 + tan\, x)\, dx \quad \text{... (1)}$$

ગુણધર્મ (6) મુજબ, $x = \frac{\pi}{4} - x$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} log\left(1 + tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} log\left[1 + \frac{tan\frac{\pi}{4} - tan\, x}{1 + tan\frac{\pi}{4} \cdot tan\, x}\right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} log\left(1 + \frac{1 - tan\, x}{1 + tan\, x}\right) dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} log\left(\frac{1 + tan\, x + 1 - tan\, x}{1 + tan\, x}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} log\left(\frac{2}{1 + tan\, x}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (log(2) - log(1 + tan\, x))\, dx$$

$$I = log\, 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} log(1 + tan\, x)\, dx$$

$$I = \log 2\ [x]_0^{\frac{\pi}{4}} - I \qquad (\because \text{ પરિણામ (1) પરથી})$$

$$2I = \log 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{8} \log 2$$

27.

આપણે વિકલ સમીકરણ નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x(e)^{\frac{x}{y}} - y}{2y(e)^{\frac{x}{y}}} \qquad \dots (1)$$

ધારો કે,

$$F(x, y) = \frac{2x(e)^{\frac{x}{y}} - y}{2y(e)^{\frac{x}{y}}}$$

$$\therefore F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\left(2x(e)^{\frac{x}{y}} - y\right)}{\left(2y(e)^{\frac{x}{y}}\right)}$$

$$= \lambda^0 F(x, y)$$

આમ, $F(x, y)$ એ શૂન્ય ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય છે. માટે આપેલ વિકલ સમીકરણ એ સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે. તેનો ઉકેલ શોધવા માટે આપણે $x = vy$ લઈએ.

સમીકરણ (2) નું 'y' ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

x અને $\frac{dx}{dy}$ ની કિંમત સમીકરણ (1) માં મૂકતાં,

$$v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2\,ve^v - 1}{2e^v}$$

$$\therefore \quad y\frac{dv}{dy} = \frac{2\,ve^v - 1}{2e^v} - v$$

$$\therefore \quad y\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{2e^v}$$

$$\therefore \quad 2e^v\, dv = -\frac{dy}{y}$$

$$\therefore \quad \int 2e^v\, dv = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\therefore \quad 2e^v = -\log|y| + c$$

$v = \frac{x}{y}$ મૂકતાં,

$$2(e)^{\frac{x}{y}} + \log|y| + c \qquad \dots (3)$$

સમીકરણ (3) માં $x = 0$ અને $y = 1$ મૂકતાં,

$$2e^0 + \log|1| = c \Rightarrow c = 2$$

c ની કિંમત સમીકરણ (3) માં મૂકતાં,

$$2(e)^{\frac{x}{y}} + \log|y| = 2$$

આ વિકલ સમીકરણનો જરૂરી વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.